Première partie

Leçon 103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications

Développements :

SO_3 est simple, Caractères et sous-groupes distingués.

Bibliographie :

Rombaldi, Perrin, OA, Rauch, Ortiz, Ulmer, Combes,Peyré, Calais.

Rapport du jury :

Dans cette leçon, il faut non seulement évoquer les notions de groupe quotient, de sous-groupe dérivé et de groupe simple mais surtout savoir les utiliser et en expliquer l'intérêt. On pourra utiliser des exemples issus de la géométrie, de l'arithmétique, de l'algèbre linéaire (utilisation d'espaces vectoriels quotients par exemple). La notion de produit semi-direct n'est plus au programme ; mais, lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral Dn par exemple). S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions à l'aide d'une table de caractères et décrire le treillis des sous-groupes distingués, ainsi que l'indice du sous-groupe dérivé, d'un groupe fini à l'aide de cette table.

1 Ensemble quotient et structure de groupes

1.1 Notion de sous-groupes distingués

Définition 1 (Romb p3)**.** *Sous-groupe distingué.*

Remarque 2 (Romb p3)**.** *H est distingué si et seulement si H est stable par tout automorphisme intérieur si et seulement si $R_h = H_R$.*

Contre exemple 3 (Hauchecorne)**.** *[Escofier p401] $< (12) >$ n'est pas distingué dans S_3 (sinon contiendrait toutes les transpositions).*

Contre exemple 4 (OA)**.** *$GL_n(\mathbb{Z})$ non distingué dans $GL_n(\mathbb{R})$.*

Exemple 5 (Romb p3)**.** *Intersection, sous-groupes triviaux.*

Proposition 6. *Si G est abélien, ses sous-groupes sont distingués.*

Exemple 7. *nZ est distingué dans Z.*

Exemple 8 (Beck p234)**.** $\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{R}$

Contre exemple 9 (Ortiz)**.** *Dans H_8 tous les sous-groupes sont distingués mais le groupe n'est pas abélien. (qui sont (1), $(1,-1)$, $< i >$, $< j >$et $< k >$).*

Proposition 10. *Les sous-groupes d'indice 2 sont distingués.*

Exemple 11. $\langle r\rangle \triangleleft D_n$.

Proposition 12. *Un sous-groupe distingué est union de classes de conjugaison.*

Proposition 13 (Calais)**.** *Le noyau d'un morphisme (en fait l'image réciproque d'un sous-groupe distingué) est distingué. L'image d'un sous-groupe distingué est distingué si le morphisme est surjectif !*

Exemple 14. *A_n dans S_n. $SL(E)$ dans $GL(E)$.*

Proposition 15 (Calais p158)**.** *Si $H \triangleleft G$ alors $f(H) \triangleleft f(G)$*
Si $H' \triangleleft G'$ alors $f^{-1}(H') \triangleleft G/$

Contre exemple 16. *L'image d'un sous groupe distingué n'est pas forcément distinguée : $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to S_3$ telle que $f(0) = id$ et $f(1) = (12)$.*

Proposition 17 (Ulmer)**.** *Soient$K < H < G$ des sous-groupes de G. Alors si K est distingué dans G alors il est distingué dans H.*

Exemple 18. *Le groupe des doubles transpositions noté V est distingué dansS_4 donc dans A_4 (car c'est une classe de conjugaison).*

Exemple 19 (Ortiz p8)**.** *$\{e\} \triangleleft (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \triangleleft A_4 \triangleleft S_4$ donc la relation "être distingué" n'est pas transitive.*
Ou : $H = \{e,(12),(34)\}, K = \{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$. (Calais p181)

1.2 Groupe quotient

Théorème 20 (Romb p4)**.** *Il existe une unique structure de groupe sur l'ensemble quotient G/H telle que la surjection canonique soit un morphisme de groupes si et seulement si H est distingué dans G.*

Contre exemple 21. *Il n'existe pas de structure de groupes sur $GL2(\mathbb{Z})/GLn(\mathbb{R})$ qui fasse de π un morphisme de groupes.*

Exemple 22. *$\mathbb{Z}$ est abélien et ses groupes quotients sont les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*
Le tore,$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. (Beck)

Proposition 23 (Calais p151)**.** *$H \triangleleft G$ si et seulement si il existe un groupe G' et un morphisme de G dans G' tel que $H = \ker(f)$*

Proposition 24 (Romb p18). *[Szpirglas p231] Correspondance des sous-groupes. Si $H \triangleleft H$, il existe une bijection entre les sous-groupes de G/H et les sous-groupes de G contenant H.*

Application 25 (Szpirglas p232). *Pour tout diviseur d de n, il existe un unique sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de cardinal d(correspond au sous-groupe $d\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ contenant $n\mathbb{Z}$). Les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $d|n$. Ils sont distingués.*

Théorème 26 (Ulmer p60). *Propriété universelle du quotient ou théorème de factorisation.*

Théorème 27 (Ulmer p63). *Premier théorème d'isomorphisme.*

Application 28 (Ulmer p64). *Un groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Exemple 29 (Ulmer p64). *$GL(E)/SL(E) \simeq K^*$ via le déterminant.*
$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq U$ via $\phi : \theta \mapsto exp(i2\pi\theta)$.
$S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ via la signature.
$O_n(K)/SO_n(K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $car(K) \neq 2$

Théorème 30 (Ulmer p78). *[Calais p168] Deuxième théorème d'isomorphisme.*

Exemple 31 (Ulmer p78). *$S_4/V_4 \simeq S_3$.*

Théorème 32 (Ulmer p64). *[Calais p170] Troisième théorème d'isomorphisme.*

Exemple 33 (Ulmer p65). *$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

2 Sous-groupes particuliers

2.1 Centre

Définition 34 (Perrin p12). *Centre*

Proposition 35 (Perrin p12). *Le centre est distingué.*

Exemple 36 (Perrin p13). *Si G est commutatif, $S(G) = G$. En particulier, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Exemple 37 (Perrin, Ortiz). *Centre de S_n, de A_n, de H_8, de D_n.*

Proposition 38 (Perrin p16). *Le centre d'un p-groupe n'est pas trivial.*

Proposition 39. *Un groupe d'ordre p^2 est abélien.*

Proposition 40. *$Int(G) \simeq G/Z(G)$.*

Exemple 41. *$Aut(S_n) = S_n$.*

2.2 Groupes dérivés

Définition 42 (Perrin p13). *Groupe dérivé.*

Exemple 43 (Perrin p13). *G commutatif, S_3, A_5, GLn, H_8, $SL(E)$, D_n.*

Proposition 44 (Calais p173). *[Ulmer p35][Perrin p13] Le groupe dérivé est distingué.*

Contre exemple 45. *$\langle(12)(34)\rangle$ non stable par $Int_{1,2,3}$.*

Proposition 46 (Combes p69). *Si $N \triangleleft G$ alors G/N est abélien si et seulement si $D(G) \subset N$.*

Proposition 47 (Perrin p13). *$G/D(G)$ est abélien et c'est le plus grand quotient abélien de G et ceci caractérise $D(G)$.*

Application 48. *Tout morphisme de groupes de G vers un groupe abélien se factorise par $D(G)$.*

3 Reconstituer un groupe à partir de ses sous-groupes distingués

3.1 Groupes simples

Définition 49 (Perrin p12). *Groupe simple.*

Proposition 50. *Un morphisme de groupes partant d'un groupe simple est trivial ou injectif.*

Exemple 51 (Perrin p12). *$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est simple si et seulement si p est premier.*

Proposition 52. *Les seuls groupes abéliens simples sont les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.*

Exemple 53. *A_n est simple pour $n \geq 5$.*

Proposition 54. *Sous-groupes simples de S_n pour $n \geq 5$.*

Contre exemple 55. *A_4 non simple.*

Exemple 56. *$SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*
Les groupes d'ordre pq ne sont jamais simples.

Contre exemple 57. *S_n pas simple.*

3.2 Produit direct

Définition 58 (Ulmer p75)**.** *Produit direct.*

Exemple 59 (Ulmer p75)**.** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proposition 60 (Ulmer p76)**.** *Le sous-groupe $N_1 \times .. \times N_k$ de $G_1 \times ... \times G_k$ est distingué si et seulement si $N_i \triangleleft G_i$.*

Contre exemple 61. *Un sous-groupe distingué d'un produit de groupes n'est pas toujours le produit de sous-groupe des facteurs du groupe (voir dans $\mathbb{Z}$).*

Proposition 62 (Combes p26)**.** *[Ulmer p76] Caractérisation du produit direct pour les sous-groupes distingués.*

Remarque 63 (Szpirglas p244)**.** *On vérifie que N et H sont tous deux distingués dans G. De plus, $G/N \simeq H$ et $G/H \simeq N$, et on a trouvé une condition suffisante pour recnstituer le groupe G comme produit direct de N et du quotient G/N.*

Application 64 (Ulmer p78)**.** *Classification des groupes d'ordre* 4.

Proposition 65 (Combes p67)**.** *Théorème de structure des groupes abéliens finis. Invariants.*

Exemple 66 (Combes p67)**.** *Groupes d'ordre 600.*

Application 67 (Combes)**.** *Sous-groupes d'ordre donné.*

Proposition 68. *Deux sous-goupes d'ordre p^2.*

4 Outils pour trouver des sous-groupes distingués

4.1 Théorèmes de Sylow

Définition 69 (Combes)**.** *p-groupe et p-Sylow.*

Exemple 70 (Perrin p18)**.** *Un p-Sylow de $GL_n(F_p$.*

Théorème 71 (Combes)**.** *Théorème de Sylow.*

Application 72 (Perrin p19)**.** *Un p-Sylow S est distingué si et seulement si S est l'unique p-Sylow de G*

Exemple 73 (Ortiz)**.** *Les* 2*-Sylow et* 3*-Sylow de S_4, ici pas d'info sur les sous-groupes distingués.*

Les 2*-Sylow de $GL(F_2)$ son unique* 3*-Sylow : on a trouvé un sous-groupe distingué.*

Exemple 74. *Les groupes d'ordre* 42, 255 *et* 84 *ne sont pas simples.*

Application 75 (Perrin p20)**.** *Un groupe d'ordre* 63 *n'est pas simple.*

Application 76 (Calais p240)**.** *Si G est un groupe fini d'ordre pq où p et q sont premiers distincts alors G n'est pas simple.*

4.2 Tables de caractères

Définition 77 (Romb p179)**.** *Représentation linéaire*

Définition 78 (Romb)**.** *Caractère*

Définition 79 (Romb)**.** *Sous espace G-invariant. Représentation irréductible. Caractère irréductible.*

Théorème 80. *Théorème de Maschke.*

Théorème 81. *Caractère d'une somme directe de représentations.*

Théorème 82. *Orthogonalité des caractères.*

Proposition 83. *Les caractères sont les fonctions centrales.*

Proposition 84. *Table de caractères.*

Exemple 85. *Table de S_4, S_3, A_4, D_n.*

Proposition 86. *Les lignes sont orthogonales.*

Proposition 87 (Rauch p43)**.** *Les représentations de G/H donnent des représentations de G, du coup la table de caractère du quotient est inclue dans celle du groupe, ex de celle de $S3$ dans celle de $S4$.*

Exemple 88. *Comme $S_4/V = S_3$, on retrouve la table de caractère de S_3 dans celle de S_4.*

Définition 89 (Peyré)**.** *Noyau d'une représentation.*

Proposition 90. *Sous-groupes distingués : $\cup K_{\chi_i}$.*

Corollaire 91. *G est simple si et seulement si pour tout $i \neq 1$ et tout $g \in G$, $\chi_i(g) \neq \chi_i(1)$.*

Exemple 92. *Sous-groupes distingués de S_4 : A_4 et $\langle (12)(34) \rangle$.*

V_4 est le seul groupe distingué de A_4 non trivial.

Exemple 93 (Peyré)**.** *Sous-groupes distingués de D_6.*